"Κεφ. 4ο"

• Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_3$ όπου παρεμβάλλεται στις τιμές της συνάρτησης:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	2	0	0	8

ΛΥΣΗ

α' τρόπος (Lagrange)

$$P(x) = f(x_0)\,L_0(x) + \cancelto{0}{f(x_1)\,L_1(x)} + \cancelto{0}{f(x_2)\,L_2(x)} + f(x_3)\,L_3(x)$$

$$= f(x_0)\cdot L_0(x) + f(x_3)\,L_3(x) =$$

$$= 2\cdot\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 8\cdot\frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{(2-(-1))(2-0)(2-1)} =$$

$$= 2\cdot\frac{x\cdot(x-1)(x-2)}{-1\cdot(-2)(-3)} + 8\cdot\frac{(x+1)\cdot x\cdot(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= x^3 + x^2 - 2x.$$

Άρα, από τη μέθοδο Lagrange μας μένουν οι εξής τύποι

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot L_i(x)} \quad \text{και} \quad \boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

β' τρόπος (Διαιρεμένες διαφορές Newton).

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
$x_0=-1$	2	—	—	—
$x_1=0$	0	-2	—	—
$x_2=1$	0	0	1	—
$x_3=2$	8	8	4	1

$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0) = 2$

$\Delta^0(x_1)(f) = f(x_1) = 0$

$\Delta^0(x_2)(f) = f(x_2) = 0$

$\Delta^0(x_3)(f) = f(x_3) = 8.$

$$\Delta^1(x_0,x_1)(f) = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{2}{-1-0} - 0 = -2$$

$$\Delta^1(x_1,x_2)(f) = \frac{f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2-x_1} = 0-0=0$$

$$\Delta^1(x_2,x_3)(f) = \frac{f(x_3)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)}{x_3-x_2} = 8-0=8 \;\ldots\text{κλπ.}$$

$$P(x) = \Delta^0(x_0)(f) + \Delta^1(x_0,x_1)(f)(x-x_0) + \Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)(x-x_0)(x-x_1) =$$

$$= 2 - 2(x+1) + 1\cdot(x+1) + 1(x+1)\cdot x(x-1) = x^3+x^2-2x.$$

Από τη μέθοδο Newton μας μένουν ότι:

$$\boxed{\Delta^i(x_0,x_1,\ldots,x_i)(f) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq j}}^{i} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0}^{i}(x_k-x_j)}}$$